绝密 ★ 考试结束前

全国 2019 年 4 月高等教育自学考试

复变函数与积分变换试题

课程代码:02199

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)=$

A. $\mathrm{Re}(z)$　　B. $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)$　　C. $\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$　　D. $-\mathrm{Im}(z)$

2. $\dfrac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)^3}=$

A. $\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}$　　B. $\mathrm{e}^{16\theta\mathrm{i}}$　　C. $\mathrm{e}^{19\theta\mathrm{i}}$　　D. $\mathrm{e}^{-2\theta\mathrm{i}}$

3. 下列函数中，仅在 $z=0$ 可导的为

A. $\mathrm{Re}(z)$　　B. $|z|^2$　　C. $\bar{z}$　　D. z^2

4. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是解析函数. 若 $v(x,y)=-x$ ，则 $f'(z)=$

A. 0　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

5. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$.下列积分不为零的是

A. $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{\cos z}$　　B. $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{\sin z}$

C. $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+5z+6}$　　D. $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$

6. 设C为正向圆周$|z|=4$，$f(z)$是解析函数，则$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^3}dz=$

A. $\pi i f''(2)$　　B. $2\pi i f''(2)$

C. $\frac{\pi i}{3}f'''(2)$　　D. $2\pi i f(2)$

7. C为正向圆周$|z|=2$，$f(z)$是解析函数，则$\oint_C \frac{zf(z)}{z^2+1}dz=$

A. $2\pi i[f(i)+f(-i)]$　　B. $2\pi i[f(i)-f(-i)]$

C. $\pi i[f(i)+f(-i)]$　　D. $\pi i[f(i)-f(-i)]$

8. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{4}\right)^n z^{2n}$的收敛半径为

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{9}{4}$

9. 在下列环域中，$f(z)=\frac{1}{z(z^2-5z+6)}$**不能**展开为洛朗级数的是

A. $0<|z|<2$　　B. $3<|z|<+\infty$

C. $0<|z-3|<1$　　D. $0<|z-2|<2$

10. $z=0$是$f(z)=\frac{e^z-1-z}{z^2}$的

A. 可去奇点　　B. 一阶极点

C. 二阶极点　　D. 本性奇点

11. 设$f(t)$的傅氏变换为$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，则$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=$

A. $e^{it_0}F(\omega)$　　B. $e^{-it_0}F(\omega)$

C. $e^{i\omega t_0}F(\omega)$　　D. $e^{-i\omega t_0}F(\omega)$

12. 设$f(t)$的拉氏变换为$\mathcal{L}[f(t)]=F(p)$，$a>0$，则$\mathcal{L}[f(at)]=$

A. $aF\left(\frac{p}{a}\right)$　　B. $\frac{1}{a}F(ap)$　　C. $aF(ap)$　　D. $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共5小题，每小题3分，共15分。

13. $(1+\mathrm{i})^{2022}=$__________.

14. 设 $f(z)=|z|^2 z$，则 $f'(0)=$__________.

15. $\ln\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)=$__________.

16. C 为上半圆周 $|z|=1$ 从点 $z=1$ 到点 $z=\mathrm{i}$ 的一段弧，则 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\bar{z}}=$__________.

17. $\frac{1}{z-(1+\mathrm{i})}$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式的收敛半径为__________.

三、计算题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

18. 求在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下，z 平面上的曲线 $x^2+y^2=4x$ 在 w 平面上的象曲线.

19. C 为正向圆周 $|z|=2$，求 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+1\right)^2}$.

20. 证明 $u(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\cos y$ 是调和函数，并求以 $u(x,y)$ 为实部的解析函数 $f(z)$.

21. C 是正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$，求 $\oint_C \sum_{n=-2}^{\infty} nz^n \,\mathrm{d}z$.

22. 求 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$ 在圆环域 $1<|z-1|<+\infty$ 内的洛朗展开式.

23. 求 $f(z)=\frac{\sin z\cos\frac{\pi}{2}z}{z(z-1)^2}$ 的所有奇点，并说明其类型，若是极点指出阶数.

四、综合题：本大题共3小题，共19分。

24.（本题6分）

（1）求将 z 平面上的点 $z_1=1$、$z_2=\mathrm{i}$ 和 $z_3=-1$ 依次映射为 w 平面上的点 $w_1=0$、$w_2=1$ 和 $w_3=\infty$ 的分式线性映射 $w=\frac{z+b}{cz+d}$；

（2）该映射将 z 平面上圆周 $|z|=1$ 映射为 w 平面上的什么曲线？

（3）该映射将 z 平面上圆的内部 $|z|<1$ 映射为 w 平面上的什么区域？

25．（本题 6 分）

利用拉氏变换解积分方程 $y(t)=t-\int_0^t(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

26．（本题 7 分）设 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$.

（1）求 $f(z)$ 的所有奇点，并说明奇点类型；

（2）求 $f(z)$ 在上半平面奇点的留数；

（3）利用上面结果求实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+9)}$.